

Exámenes de Selectividad

Matemáticas II. Cataluña 2020, Convocatoria
extraordinaria

mentoor.es



Problema 1. Análisis

Sean las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = a \cdot x^2$, en que a es un número real positivo.

- Encuentre, en función del parámetro a , los puntos de corte entre las dos curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas.
- Calcule el valor de a para que el área comprendida entre $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sea $\frac{27}{4}u^2$.

Solución:

- Encuentre, en función del parámetro a , los puntos de corte entre las dos curvas $y=f(x)$ e $y=g(x)$ y haga un esbozo de la región limitada por las dos gráficas.

Igualemos las funciones para encontrar los puntos de corte:

$$x^3 = ax^2 \implies x^3 - ax^2 = 0 \implies x^2(x - a) = 0$$

Las soluciones son $x = 0$ y $x = a$.

Los puntos de corte son $(0, 0)$ y (a, a^3) .

La región está encerrada entre la cúbica $y = x^3$ y la parábola $y = ax^2$ en el intervalo $[0, a]$. En este intervalo, $ax^2 \geq x^3$.



- Calcule el valor de a para que el área comprendida entre $y=f(x)$ e $y=g(x)$ sea $\frac{27}{4}u^2$.

El área viene dada por la integral definida de la diferencia de las funciones.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^a (ax^2 - x^3)dx = \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a \\ &= \left(\frac{a(a^3)}{3} - \frac{a^4}{4} \right) - 0 = \frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{12} \end{aligned}$$

Igualemos este resultado al valor dado:

$$\frac{a^4}{12} = \frac{27}{4} \implies a^4 = \frac{12 \cdot 27}{4} = 3 \cdot 27 = 81$$

Como a es un número real positivo, $a = \sqrt[4]{81} = 3$.

El valor del parámetro es $a = 3$.

Problema 2. Geometría

Un avión se desplaza desde un punto $A=(0,3,1)$ hacia una plataforma plana de ecuación $\pi : x - 2y + z = 1$ siguiendo una recta r paralela al vector $v = (1, -1, 0)$.

- Calcule las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida.
- Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A.

Solución:

- Calcule las coordenadas del punto de contacto B del avión con el plano y la distancia recorrida.

La recta r seguida por el avión es: $r \equiv (x, y, z) = (0, 3, 1) + \lambda(1, -1, 0) = (\lambda, 3 - \lambda, 1)$.

El punto de contacto B es la intersección de r y π :

$$(\lambda) - 2(3 - \lambda) + 1 = 1 \implies \lambda - 6 + 2\lambda + 1 = 1 \implies 3\lambda = 6 \implies \lambda = 2$$

Sustituyendo $\lambda = 2$ en la recta, obtenemos $B = (2, 3 - 2, 1) = (2, 1, 1)$.

La distancia recorrida es el módulo del vector $\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = B - A = (2, -2, 0) \implies d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

El punto es B(2,1,1). La distancia es $2\sqrt{2}$ unidades.

- Calcule la ecuación general del plano perpendicular a la plataforma y que contiene la recta r seguida por el avión desde el punto A.

El plano buscado, π' , contiene a la recta r , por lo que pasa por el punto $A(0,3,1)$ y tiene como vector director a $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Además, es perpendicular a π , por lo que el vector normal de π , $\vec{n}_\pi = (1, -2, 1)$, es otro vector director de π' .

El vector normal de π' es $\vec{n}_{\pi'} = \vec{v} \times \vec{n}_\pi$:

$$\vec{n}_{\pi'} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

Podemos usar el vector proporcional $(1, 1, 1)$.

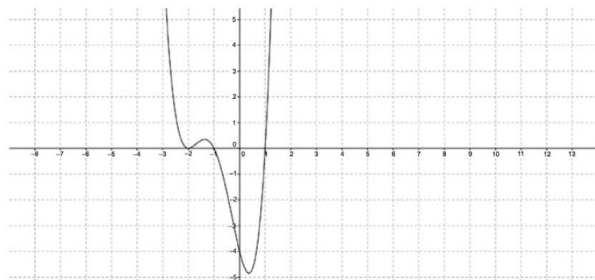
La ecuación del plano es $1(x - 0) + 1(y - 3) + 1(z - 1) = 0 \implies x + y + z - 4 = 0$.

El plano es $x + y + z - 4 = 0$.

Problema 3. Análisis

Sea $f(x)$ una función derivable cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$. La gráfica de su derivada, $f'(x)$, es la que se muestra en la figura.

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x=0$.
- Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasifíquelos.



Solución:

- Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de la gráfica de abscisa $x=0$.

La ecuación de la recta tangente es $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

Del enunciado, sabemos que la gráfica pasa por $(0, 1)$, luego $f(0) = 1$.

De la gráfica de $f'(x)$, observamos que cuando $x = 0$, el valor de la derivada es $f'(0) = -3$.

La ecuación es: $y - 1 = -3(x - 0) \implies y = -3x + 1$.

La recta tangente es $y = -3x + 1$.

- Encuentre las abscisas de los puntos singulares de la función $f(x)$ y clasifíquelos.

Los puntos singulares son aquellos donde la primera derivada se anula, $f'(x) = 0$. Observando la gráfica de $f'(x)$, esto ocurre en $x = -1$ y $x = 1$.

Para clasificarlos, estudiamos el signo de $f'(x)$ alrededor de estos puntos:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

En $x = -1$, la función pasa de crecer a decrecer, por lo tanto hay un **máximo relativo**.

En $x = 1$, la función pasa de decrecer a crecer, por lo tanto hay un **mínimo relativo**.

Máximo relativo en $x = -1$. Mínimo relativo en $x = 1$.

Problema 4. Álgebra

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -3 & 0 \\ 4 & a-7 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, en que a es un parámetro real.

- Estudie el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a .
- Compruebe que para $a=4$ la matriz A es invertible y que se verifica que $A^{-1} = A^2$.

Solución:

- Estudie el rango de la matriz A para los diferentes valores del parámetro a .

$$\begin{aligned} |A| &= a(7 - a - (-1)) - (-3)(-4 - 1) = a(8 - a) - 15 = -a^2 + 8a - 15. \\ |A| = 0 &\iff -a^2 + 8a - 15 = 0 \iff a = 3, a = 5. \end{aligned}$$

Caso 1: $a \notin \{3, 5\}$. $|A| \neq 0 \implies \text{Rg}(A) = 3$.

Caso 2: $a = 3$. $|A| = 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

Caso 3: $a = 5$. $|A| = 0$, $\text{Rg}(A) = 2$.

Si $a \notin \{3, 5\}$, $\text{Rg}(A) = 3$. Si $a \in \{3, 5\}$, $\text{Rg}(A) = 2$.

- Compruebe que para $a=4$ la matriz A es invertible y que se verifica que $A^{-1} = A^2$.

Para $a = 4$, $|A| = -16 + 32 - 15 = 1 \neq 0$, por lo que es invertible.

Para comprobar que $A^{-1} = A^2$, basta con verificar que $A \cdot A^2 = I$, es decir, $A^3 = I$.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \end{aligned}$$

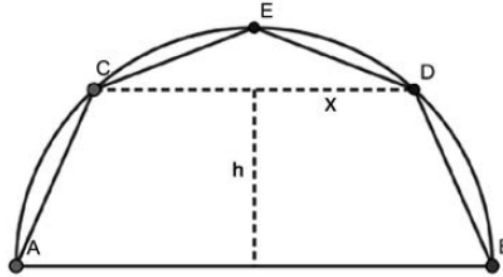
Para $a=4$, A es invertible y se comprueba que $A^3 = I$, por lo que $A^{-1} = A^2$.



Problema 5. Análisis

Una empresa está trabajando en el diseño de unas cápsulas de café. La empresa ha construido la sección transversal de las cápsulas inscribiéndola en una semicircunferencia de radio 1, trazando a continuación una cuerda CD paralela al diámetro AB e incorporando el punto E en el punto medio del arco CD. De esta manera queda trazado el pentágono ACEDB.

- Expresar en función de x y h el área del pentágono ACEDB.
- ¿Cuál ha de ser la distancia (indicada en la figura por h) a que se ha de situar la cuerda CD de AB para que el área del pentágono ACEDB sea máxima?



Solución:

- Expresar en función de x y h el área del pentágono ACEDB.

El área del pentágono es la suma del área del trapecio ACDB y el área del triángulo CDE.

$$\text{Área(ACDB)} = \frac{\text{Base mayor} + \text{base menor}}{2} \cdot \text{altura} = \frac{2+x}{2}h = (1+x)h.$$

$$\text{Área(CDE)} = \frac{1}{2} \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2}(2x)(1-h) = x(1-h).$$

El punto $C(x,h)$ está en la semicircunferencia de radio 1, por lo que $x^2 + h^2 = 1 \implies x = \sqrt{1-h^2}$.

Sustituyendo x :

$$\text{Área Total } A(h) = (1+\sqrt{1-h^2})h + \sqrt{1-h^2}(1-h) = h + h\sqrt{1-h^2} + \sqrt{1-h^2} - h\sqrt{1-h^2} = h + \sqrt{1-h^2}.$$

El área es $A(h) = h + \sqrt{1-h^2}$.

- ¿Cuál ha de ser la distancia (indicada en la figura por h) a que se ha de situar la cuerda CD de AB para que el área del pentágono ACEDB sea máxima?

Derivamos $A(h)$ respecto de h e igualamos a cero.

$$A'(h) = 1 + \frac{-2h}{2\sqrt{1-h^2}} = 1 - \frac{h}{\sqrt{1-h^2}}$$

$$A'(h) = 0 \implies 1 = \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \implies \sqrt{1-h^2} = h \implies 1-h^2 = h^2 \implies 2h^2 = 1 \implies h = 1/\sqrt{2}.$$

La distancia es $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 6. Geometría

Sean las rectas r y s , expresadas por $\frac{x-3}{2} = y = z - 1$ y $(\mu, -\mu, \mu)$, respectivamente.

- Determine la posición relativa de las rectas.
- Calcule la distancia entre la recta r y la recta s .

Solución:

- Determine la posición relativa de las rectas.

$$r : P_r(3, 0, 1), \vec{v}_r(2, 1, 1). \\ s : P_s(0, 0, 0), \vec{v}_s(1, -1, 1).$$

Los vectores directores no son proporcionales. Las rectas se cortan o se cruzan. Estudiamos el producto mixto con el vector $\vec{P_s P_r} = (3, 0, 1)$.

$$[\vec{P_s P_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1 - (-1)) - 0 + 1(-2 - 1) = 6 - 3 = 3 \neq 0$$

Como el determinante es no nulo, los vectores no son coplanarios.

Las rectas se cruzan.

- Calcule la distancia entre la recta r y la recta s .

La distancia entre dos rectas que se cruzan se calcula con la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{|[\vec{P_s P_r}, \vec{v}_r, \vec{v}_s]|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}$$

Ya tenemos el valor absoluto del producto mixto, que es 3.

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -3)$$

$$|\vec{v}_r \times \vec{v}_s| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

$$d(r, s) = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

La distancia es $\frac{3\sqrt{14}}{14}$ unidades.

